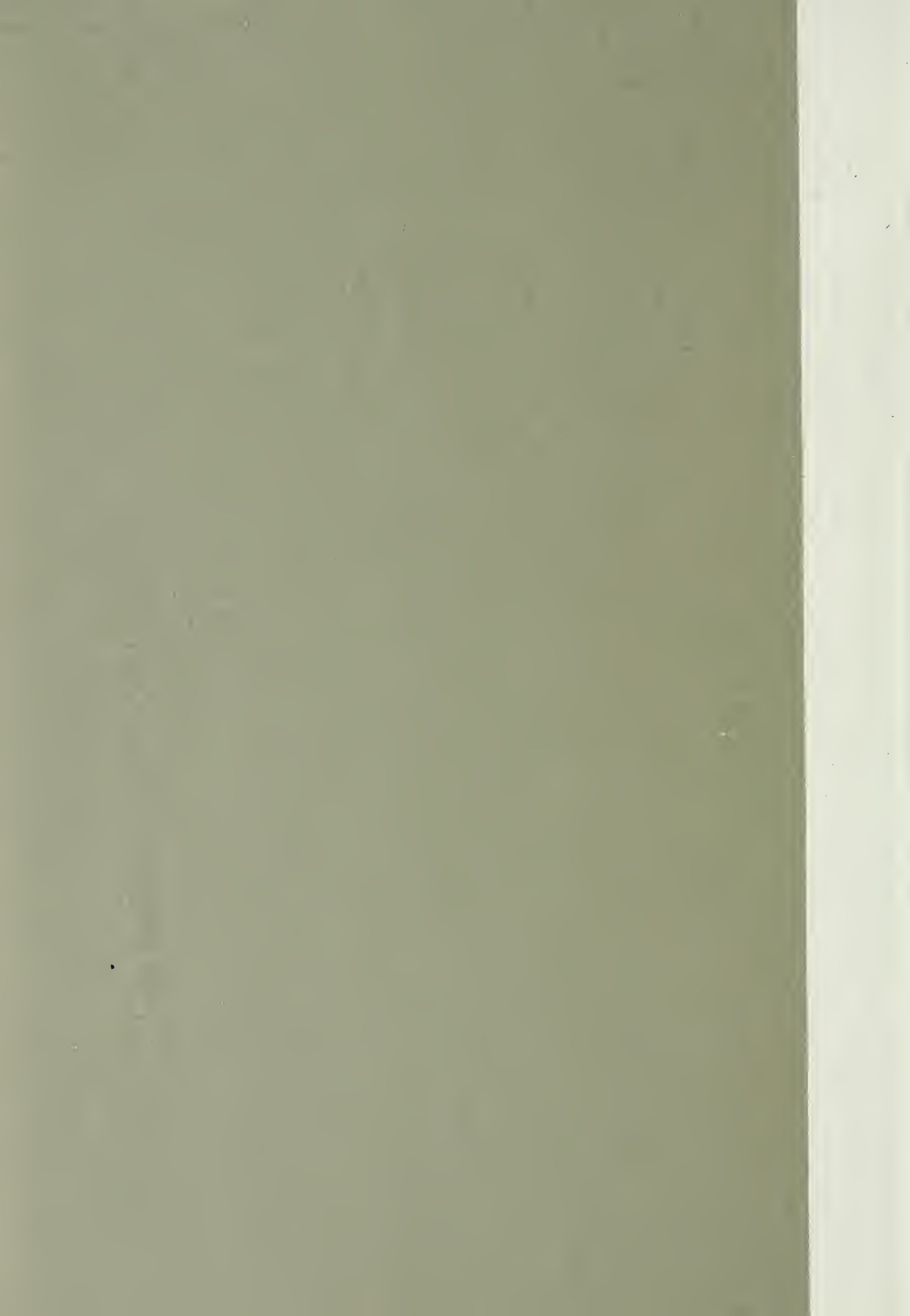




DIE TRANSFORMATION

DER

TRILINEAREN TERNÄREN FORM

IN EINE

TEILWEISE SYMMETRISCHE.

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER PHILOSOPHISCHEN DOKTORWÜRDE

DER

PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT ZU GIESSEN

VORGELEGT VON

PHILIPP MAENNCHEN

AUS HOHEN-SÜLZEN.

DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG.

1898.



DIE TRANSFORMATION

DER

TRILINEAREN TERNÄREN FORM

IN EINE

TEILWEISE SYMMETRISCHE.

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER PHILOSOPHISCHEN DOKTORWÜRDE

DER

PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT ZU GIESSEN

VORGELEGT VON

PHILIPP MAENNCHEN

AUS HOHEN-SÜLZEN.

DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG.

1898.



SEINEM VEREHRTEN LEHRER

HERRN PROF. DR. M. PASCH

IN DANKBARKEIT GEWIDMET

VOM VERFASSER.



I. Einleitung.

Im 95. Bande von Crelles Journal (1887) behandelt Herr Rosanes u. a. folgende Frage:

Wann lassen sich drei bilineare ternäre Formen

$$f(x,y) = \sum_{i,k=1}^{3} a_{ik} x_i y_k$$

$$f'(x,y) = \sum_{i,k=1}^{3} b_{ik} x_i y_k$$

$$f''(x,y) = \sum_{i,k=1}^{3} c_{ik} x_i y_k$$

durch eine und dieselbe Substitution:

$$y_k = \sum_{l=1}^{3} p_{kl} \eta_l$$

gleichzeitig in symmetrische überführen?

Er erhält als Bedingung das Verschwinden der folgenden Invariante:

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -a_{31} & -a_{32} & -a_{33} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 & -b_{31} & -b_{32} & -b_{33} & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & 0 & -c_{31} & -c_{32} & -c_{33} & c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 0 & -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & 0 & 0 & 0 & -b_{11} & -b_{12} & -b_{13} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & 0 & 0 & 0 & -c_{11} & -c_{12} & -c_{13} \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & 0 \\ -b_{21} & -b_{22} & -b_{23} & b_{11} & b_{12} & b_{13} & 0 & 0 & 0 \\ -c_{21} & -c_{22} & -c_{23} & c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Diese Bedingung ist notwendig, aber nicht hinreichend, da die Substitutionsdeterminante

$$\begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{vmatrix} = P$$

von Null verschieden sein mufs. Die p_{ik} haben nun gewisse neun Gleichungen zu erfüllen. Es lassen sich aber leicht Fälle angeben, wo alle möglichen p_{ik}, die diese Gleichungen erfüllen, keine von Null verschiedene Determinante haben. Ich führe hier ein Beispiel an, wo sich dies sehr deutlich zeigt:

$$f(x,y) = x_1 \sum a_{1k} y_k$$
$$f'(x,y) = x_1 \sum b_{1k} y_k$$
$$f''(x,y) = x_1 \sum c_{1k} y_k$$
$$\left[\sum \pm a_{11} b_{12} c_{13} \neq 0\,^{*)}\right].$$

Hier ist es nicht möglich, eine von Null verschiedene Determinante P herzustellen, da alle p_{i2} uud p_{i3} verschwinden müssen. Denn die sechs Gleichungen:

$$\begin{aligned} a_{11} p_{13} + a_{12} p_{23} + a_{13} p_{33} &= 0 \\ b_{11} p_{13} + b_{12} p_{23} + b_{13} p_{33} &= 0 \\ c_{11} p_{13} + c_{12} p_{23} + c_{13} p_{33} &= 0 \\ a_{11} p_{12} + a_{12} p_{22} + a_{13} p_{32} &= 0 \\ b_{11} p_{12} + b_{12} b_{22} + b_{13} p_{32} &= 0 \\ c_{11} p_{12} + c_{12} p_{22} + c_{13} p_{32} &= 0 \end{aligned}$$

können nur dann erfüllt werden, wenn alle p_{i3} und alle p_{i2} verschwinden.

Mit demselben Gegenstande beschäftigt sich Herr Igel, Monatshefte f. Math. u. Phys., V. Jahrg. 1884.

Herr Igel sucht zunächst die Bedingung, welche erfüllt sein mufs, damit die drei Formen durch die Substitution

$$x_\varkappa = \sum_{l=1}^{3} p'_{\varkappa l} \xi_l$$

gleichzeitig in symmetrische transformiert werden können. Nun macht Herr Igel folgenden Schlufs:

---

*) Selbst wenn $\sum \pm a_{11} b_{12} c_{13}$ auf die zweite Stufe herabsinkt, ist noch kein P möglich, das von Null verschieden ist.

Wenn D verschwindet, so kann ich die drei Formen durch lineare Substitution für die y in symmetrische überführen. Kann ich aber drei Formen in symmetrische verwandeln durch lineare Transformation der einen Reihe von Variabeln, so kann ich stets dasselbe erreichen durch lineare Transformation der andern Reihe. Folglich mufs ich im vorliegenden Falle die Formen auch durch lineare Transformation der x symmetrisch machen können, d. h. auch eine weitere Invariante E verschwindet. — So kommt er zu dem interessanten Resultat: Das Verschwinden von D bedingt das Verschwinden von E, und umgekehrt.

Dieses Resultat ist, wie ich zeigen werde, vollkommen richtig, doch ist durch die von Herrn Igel gegebene Beweisführung folgende Möglichkeit nicht ausgeschlossen:

D ist gleich Null, aber alle p_{ik} bilden verschwindende Determinanten P. Ist nun E von Null verschieden, so kann man in Übereinstimmung mit dem oben erwähnten Satze weder durch Transformation der x, noch durch Transformation der y Symmetrie erzeugen. Das Verschwinden von D braucht somit noch nicht das Verschwinden von E zu bedingen.

Im weiteren Verlauf seiner Untersuchungen multipliciert Herr Igel die Determinante D mit Δ^3, wobei Δ eine Determinante dritten Grades bedeutet. Dann untersucht er die Bedingung, welche erfüllt sein mufs, damit $D \cdot \Delta^3$ schief-symmetrisch wird. Er erhält als Resultat, dafs alsdann die folgende Invariante verschwinden mufs:

$$F = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -c_{11} & -c_{12} & -c_{13} & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & 0 & 0 & -c_{21} & -c_{22} & -c_{23} & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & 0 & -c_{31} & -c_{32} & -c_{33} & b_{31} & b_{32} & b_{33} \\ c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 & -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 & -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & 0 & 0 & 0 & -a_{31} & -a_{32} & -a_{33} \\ -b_{11} & -b_{12} & -b_{13} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & 0 \\ -b_{21} & -b_{22} & -b_{23} & a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & 0 \\ -b_{31} & -b_{32} & -b_{33} & a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Damit endlich $E \cdot \Delta^3$ schief-symmetrisch wird, mufs die Invariante G verschwinden, die man aus F ebenso erhält, wie E aus D. (Ich will hierzu bemerken, dafs auch umgekehrt $D = 0$ die Bedingung dafür ist, dafs $F \cdot \Delta^3$ schief-symmetrisch wird, ebenso $E = 0$ dafür, dafs $G \cdot \Delta^3$ die gleiche Eigenschaft erhält.)

Hieraus zieht nun Herr Igel folgende Schlüsse: Wenn F verschwindet, so wird die Determinante $D \cdot \varDelta^3$ schief-symmetrisch, verschwindet also, da sie von ungeradem Grade ist. Daraus folgt: Wenn F gleich Null wird, so wird auch D gleich Null. In gleicher Weise gelangt er zu dem Resultat: Wenn G verschwindet, dann verschwindet auch E.

Dieses Verfahren kann man auch anwenden, um das gleichzeitige Verschwinden von D und E im Sinne der Igelschen Abhandlung zu beweisen. Man braucht nur die Multiplikation von D mit $\varDelta^3$ so auszuführen, daſs man Spalte mit Spalte komponiert. Untersucht man nun die Bedingung für das Zustandekommen der schiefen Symmetrie, so ergiebt sich $E = 0$.

Bei diesen Schlüssen ist jedoch zu berücksichtigen, daſs sie zu gelten aufhören, wenn $\varDelta$ verschwindet. Wohl deshalb erklärt der Verfasser es für wünschenswert, daſs die erwähnten Zusammenhänge direkt bewiesen würden.

Diesen direkten Beweis werde ich nun in der That führen. Ehe ich mich aber dazu wende, will ich die vier Invarianten D, E, F und G einheitlich definieren. So, wie sie von Herrn Igel eingeführt sind, kann man F und G nur auf der Grundlage von D und E definieren, nicht aber mit Bezug auf die Formen f, f' und f'' selbst. Damit ich aber die vier Invarianten als gleichberechtigte darstellen kann, muſs ich auf die trilineare Form eingehen und die Bedingungen untersuchen, die zu erfüllen sind, damit dieselbe durch lineare Transformation einer Reihe von Variabeln teilweise symmetrisch wird (d. h. in zwei Reihen von Variabeln).

Ich bilde die folgende Summe:

$$z_1 f + z_2 f' + z_3 f'' = z_1 \sum_{i,k=1}^{3} a_{ik} x_i y_k + \\ + z_2 \sum_{i,k=1}^{3} b_{ik} x_i y_k + z_3 \sum_{i,k=1}^{3} c_{ik} x_i y_k .$$

Bezeichne ich noch

$$a_{ik} = a_{ik1} ,$$
$$b_{ik} = a_{ik2} ,$$
$$c_{ik} = a_{ik3} ,$$

so wird

$$z_1 f + z_2 f' + z_3 f'' = \sum_{i,k,l=1} a_{ikl} x_i y_k z_l .$$

Wenn nun durch lineare Transformation der x, bezw. y, das System der drei bilinearen Formen symmetrisch wird in ξ, y, bezw. in x, η, so wird auch die trilineare Form, zu der wir eben gelangt sind, teilweise symmetrisch, nämlich ebenfalls in ξ, y, bezw. x, η.

Wie wir gesehen haben, sind $E=0$, bezw. $D=0$ die notwendigen (aber nicht hinreichenden) Bedingungen dafür, dafs diese Symmetrie herstellbar ist. Ich führe noch die Bezeichnung ein:

$$D = D_{x,\eta,z} = D_{123},$$
$$E = D_{y,\xi,z} = D_{213}.$$

Nun erkennen wir leicht folgenden Zusammenhang:

$D_{x,\eta,z} = D_{123} = 0$: Bedingung für Symmetrie in x, η,
$D_{\eta,\xi,z} = D_{213} = 0$: „ „ „ „ y, ξ,
$D_{z,\xi,y} = D_{312} = 0$: „ „ „ „ z, ξ,
$D_{z,\eta,x} = D_{321} = 0$: „ „ „ „ z, η,
$D_{y,\zeta,x} = D_{231} = 0$: „ „ „ „ y, ζ,
$D_{x,\zeta,y} = D_{132} = 0$: „ „ „ „ x, ζ.

Setze ich

$$\sum a_{ikl} x_i y_k z_l = \sum A_{lik} z_l x_i y_k,$$

so ist leicht ersichtlich, dafs ich D_{312} aus D_{123} einfach dadurch erhalte, dafs ich überall a_{ikl} durch A_{ikl} ersetze. Setze ich alsdann wieder für jedes A_{lik} seinen Wert a_{ikl} ein und für a_{ikl} endlich a_{ik}, b_{ik}, c_{ik}, je nachdem $l = 1, 2, 3$ ist, so erhalte ich:

$$D_{312} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -c_{11} & -c_{21} & -c_{31} & b_{11} & b_{21} & b_{31} \\ 0 & 0 & 0 & -c_{12} & -c_{22} & -c_{32} & b_{12} & b_{22} & b_{32} \\ 0 & 0 & 0 & -c_{13} & -c_{23} & -c_{33} & b_{13} & b_{23} & b_{33} \\ c_{11} & c_{21} & c_{31} & 0 & 0 & 0 & -a_{11} & -a_{21} & -a_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} & 0 & 0 & 0 & -a_{12} & -a_{22} & -a_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & 0 & -a_{13} & -a_{23} & -a_{33} \\ -b_{11} & -b_{21} & -b_{31} & a_{11} & a_{21} & a_{31} & 0 & 0 & 0 \\ -b_{12} & -b_{22} & -b_{32} & a_{12} & a_{22} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ -b_{13} & -b_{23} & -b_{33} & a_{13} & a_{23} & a_{33} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Dies ist die von Herrn Igel mit G bezeichnete Invariante. Führt man in D_{213} dieselben Umformungen aus, so erhält man D_{321}. Also:

$$D_{321} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -a_{31} & -b_{31} & -c_{31} & a_{21} & b_{21} & c_{21} \\ 0 & 0 & 0 & -a_{32} & -b_{32} & -c_{32} & a_{22} & b_{22} & c_{22} \\ 0 & 0 & 0 & -a_{33} & -b_{33} & -c_{33} & a_{23} & b_{23} & c_{23} \\ a_{31} & b_{31} & c_{31} & 0 & 0 & 0 & -a_{11} & -b_{11} & -c_{11} \\ a_{33} & b_{32} & c_{32} & 0 & 0 & 0 & -a_{12} & -b_{12} & -c_{12} \\ a_{33} & b_{33} & c_{33} & 0 & 0 & 0 & -a_{13} & -b_{13} & -c_{13} \\ -a_{21} & -b_{21} & -c_{21} & a_{11} & b_{11} & c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ -a_{22} & -b_{22} & -c_{22} & a_{12} & b_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ -a_{23} & -b_{23} & -c_{23} & a_{13} & b_{13} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Dies ist wieder die Determinante $D_{123} = D$, nur mit dem entgegengesetzten Vorzeichen.

In der gleichen Weise kann man die Invarianten D_{231} und D_{132} darstellen, und es ergeben sich die folgenden Werte:

$$D_{231} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -a_{13} & -b_{13} & -c_{13} & a_{12} & b_{12} & c_{12} \\ 0 & 0 & 0 & -a_{23} & -b_{23} & -c_{23} & a_{22} & b_{22} & c_{22} \\ 0 & 0 & 0 & -a_{33} & -b_{33} & -c_{33} & a_{32} & b_{32} & c_{32} \\ a_{13} & b_{13} & c_{13} & 0 & 0 & 0 & -a_{11} & -b_{11} & -c_{11} \\ a_{23} & b_{23} & c_{23} & 0 & 0 & 0 & -a_{21} & -b_{21} & -c_{21} \\ a_{33} & b_{33} & c_{33} & 0 & 0 & 0 & -a_{31} & -b_{31} & -c_{31} \\ -a_{12} & -b_{12} & -c_{12} & a_{11} & b_{11} & c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ -a_{22} & -b_{22} & -c_{22} & a_{21} & b_{21} & c_{21} & 0 & 0 & 0 \\ -a_{32} & -b_{32} & -c_{32} & a_{31} & b_{31} & c_{31} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$D_{132} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -c_{11} & -c_{12} & -c_{13} & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & 0 & 0 & -c_{21} & -c_{22} & -c_{23} & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & 0 & -c_{31} & -c_{32} & -c_{33} & b_{31} & b_{32} & b_{33} \\ c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 & -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 & -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & 0 & 0 & 0 & -a_{31} & -a_{32} & -a_{33} \\ -b_{11} & -b_{12} & -b_{13} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & 0 \\ -b_{21} & -b_{22} & -b_{23} & a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & 0 \\ -b_{31} & -b_{32} & -b_{33} & a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Man erkennt, dafs $D_{231} = - D_{213} = - E$ und $D_{132} = F$ ist. So erhalten wir nicht sechs, sondern nur drei verschiedene Invarianten, denn auch F und G lassen sich leicht in einander überführen und unterscheiden sich nur durch das Vorzeichen.

Nun will ich untersuchen, welcher Zusammenhang zwischen diesen drei Invarianten besteht. Ich werde zunächst beweisen — und zwar auf direktem Wege — dafs $D + E \equiv 0$ ist. Daraus wird sich alsdann sofort ableiten lassen, dafs $E \equiv F$ ist.

II. Beziehungen zwischen den auftretenden Invarianten.

Ich entwickele die beiden Determinanten D und E nach dem Laplaceschen Zerlegungstheorem nach drei Systemen von je drei Zeilen. Dabei ergeben sich 54 Produkte aus je drei Subdeterminanten dritten Grades. (Eigentlich sind es 56, aber zwei davon heben sich fort.)

Der Kürze halber bezeichne ich die Spalte $\begin{matrix} a_{ik} \\ b_{ik} \\ c_{ik} \end{matrix}$ einfach mit ik. Um das Vorzeichen der einzelnen Produkte zu ermitteln, stelle ich die ihnen entsprechenden Substitutionen in einer Tabelle zusammen und gebe zu jeder den gehörigen Modul an:

				Mod.					Mod.
1)	457	891	236	(+)	18)	469	783	125	(−)
2)	457	892	136	(−)	19)	478	923	561	(+)
3)	457	893	126	(+)	20)	478	913	562	(−)
4)	458	791	236	(−)	21)	478	912	563	(+)
5)	458	792	136	(+)	22)	479	823	561	(−)
6)	458	793	126	(−)	23)	479	813	562	(+)
7)	459	781	236	(+)	24)	479	812	563	(−)
8)	459	782	136	(−)	25)	489	723	561	(+)
9)	459	783	126	(+)	26)	489	713	562	(−)
10)	467	891	235	(−)	27)	489	712	563	(+)
11)	467	892	135	(+)	28)	567	891	234	(+)
12)	467	893	125	(−)	29)	567	892	134	(−)
13)	468	791	235	(+)	30)	567	893	124	(+)
14)	468	792	135	(−)	31)	568	791	234	(−)
15)	468	793	125	(+)	32)	568	792	134	(+)
16)	469	781	235	(−)	33)	568	793	124	(−)
17)	469	782	135	(+)	34)	569	781	234	(+)

				Mod.					Mod.
35)	569	782	134	(—)	45)	589	127	463	(—)
36)	569	783	124	(+)	46)	678	912	345	(+)
37)	578	239	461	(—)	47)	678	913	245	(—)
38)	578	139	462	(+)	48)	678	923	145	(+)
39)	578	129	463	(—)	49)	679	812	345	(—)
40)	579	238	461	(+)	50)	679	813	245	(+)
41)	579	138	462	(—)	51)	679	823	145	(—)
42)	579	128	463	(+)	52)	689	712	345	(+)
43)	589	237	461	(—)	53)	689	713	245	(—)
44)	589	137	462	(+)	54)	689	723	145	(+)

Dazu kommt noch 456 789 123 und 789 123 456; man sieht aber leicht, dafs die beiden Produkte, denen diese Substitutionen entsprechen, sich fortheben.

Die aus D entnommenen Produkte bezeichne ich mit d_λ, wo λ die Nummer in der obigen Tabelle bedeutet; in gleicher Weise bezeichnet e_λ ein Produkt aus E.

Ich suche nun zunächst in beiden Determinanten diejenigen Produkte, in denen die Spalten mit den Indices 12 und 23 nicht auftreten, die also allein zurückbleiben, wenn die Elemente dieser Spalten sämtlich gleich Null gesetzt werden. Es sind dies nur vier Produkte in jeder der beiden Determinanten, nämlich:

$$d_6 = (31,32,22)(11,13,33)(22,21,13) \qquad e_{13} = (13,33,22)(11,31,13)(22,32,21)$$
$$d_{33} = (32,33,22)(11,13,33)(22,21,11) \qquad e_{16} = (13,33,32)(11,21,13)(32,22,21)$$
$$d_{37} = (32,21,22)(32,33,13)(11,13,21) \qquad e_{26} = (13,22,32)(11,13,33)(22,21,31)$$
$$d_{38} = (32,21,22)(31,33,13)(13,11,22) \qquad e_{53} = (33,22,32)(11,13,33)(21,22,11)$$

Man sieht, dafs $d_{33} = - e_{53}$ und $d_{37} = - e_{16}$ ist. Ferner erhält man durch Anwendung der Determinantenidentität

$$(abc)(def) - (abf)(dec) = (abd)(cef) - (abe)(cdf)$$

folgendes:

$$d_6 + e_{26} = (11,13,33)\{(22,21,13)(32,22,31) - (22,21,31)(32,22,13\} =$$
$$= (11,13,33)(22,21,32)(13,22,31),$$
$$d_{38} + e_{13} = (22,32,21)\{(13,31,33)(22,13,11) - (13,31,11)(22,13,33)\} =$$
$$= (22,32,21)(13,31,22)(33,13,11).$$

Hieraus ergiebt sich:

$$d_6 + d_{38} + e_{13} + e_{26} = 0.$$

Ich verschiebe jetzt in (1) die Indices 1, 2, 3 cyklisch. Dadurch entstehen Produkte, in denen die Indices 23 und 31 nicht vorkommen. d_{33}, d_{37}, e_{16} und e_{53} reproducieren sich dabei wieder selbst. Aus den übrigen entsteht:

$$(2)\quad \begin{array}{l|l} (12,13,33)(22,21,11)(33,32,21)=d_{30} & (21,11,33)(22,12,21)(33,13,32)=e_{18} \\ (13,32,33)(12,11,21)(21,22,33)=d_{48} & (21,33,13)(22,21,11)(33,32,12)=e_{50}. \end{array}$$

Aus der Entstehungsweise dieser vier Produkte folgt:

$$d_{30}+d_{48}+e_{18}+e_{50}=0.$$

Verschiebe ich die Indices dieser vier Produkte nochmals in der gleichen Weise, so ergiebt sich:

$$(3)\quad \begin{array}{l|l} (23,21,11)(33,32,22)(11,13,32)=d_{32} & (32,22,11)(33,23,32)(11,21,13)=e_{34} \\ (21,13,11)(23,22,32)(32,33,11)=d_{43} & (32,11,21)(33,32,22)(11,13,23)=e_{52}; \end{array}$$

und hieraus folgt wie oben:

$$d_{32}+d_{43}+e_{34}+e_{52}=0.$$

Nun verwandle ich in (1), (2) und (5) alle Indices ik in ki. Dann erhalte ich folgendes:

$$(1\,a)\quad \begin{array}{l} e_{33}+d_{53}=0, \quad e_{37}+d_{16}=0. \\ e_{6}+e_{38}+d_{13}+d_{26}=0, \end{array}$$

$$(2\,a)\quad e_{30}+e_{48}+d_{18}+d_{50}=0,$$

$$(3\,a)\quad e_{32}+e_{43}+d_{34}+d_{52}=0.$$

Die Indices 11 und 22 kommen nicht vor in:

$$(4)\quad \begin{array}{l|l} (31,32,21)(12,13,32)(23,21,13)=d_{2} & (13,23,12)(21,31,23)(32,12,31)=e_{2} \\ (31,33,21)(12,13,32)(21,23,12)=d_{11} & (13,33,12)(21,31,23)(12,32,21)=e_{11} \\ (31,21,23)(12,32,33)(12,13,21)=d_{22} & (13,12,32)(21,23,33)(21,31,12)=e_{22} \\ (31,21,23)(12,31,32)(12,13,23)=d_{24} & (13,12,32)(21,13,23)(21,31,32)=e_{24} \end{array}$$

Hier ist sofort ersichtlich, dafs:

$$d_{2}+e_{24}=0 \quad \text{und} \quad d_{24}+e_{2}=0$$

ist. Ferner ist:

$$d_{11}+e_{22}=(12,13,32)\{(23,21,12)(31,21,33)-(23,21,33)(31,21,12)\}=$$
$$=(12,13,32)(23,21,31)(12,21,33).$$

Durch Vertauschen der Indices erhält man hieraus:

$$e_{11}+d_{22}=(21,31,23)(32,12,13)(21,12,33);$$

folglich ist:

$$d_{11}+d_{22}+e_{11}+e_{22}=0.$$

Wenn ich in (4) die Indices cyklisch verschiebe, so bleiben d_2, d_{24}, e_2 und e_{24} unverändert. Aus den andern entsteht:

$$(5)\quad \begin{array}{l|l} (12,11,32)(23,21,13)(32,31,23)=d_8 & (21,11,23)(32,12,31)(23,13,32)=e_8 \\ (12,32,31)(23,13,11)(23,21,32)=d_{42} & (21,23,13)(32,31,11)(32,12,23)=e_{42}. \end{array}$$

Hieraus folgt:

$$d_8+d_{42}+e_8+e_{42}=0.$$

Eine nochmalige Verschiebung ergiebt:

$$(6)\quad \begin{array}{l|l} (23,22,13)(31,32,21)(13,12,31)=d_1 & (32,22,31)(13,23,12)(31,21,13)=e_1 \\ (23,13,12)(31,21,22)(31,32,13)=d_{21} & (32,31,21)(13,12,22)(13,23,31)=e_{21}. \end{array}$$

Also ist auch:

$$d_1+d_{21}+e_1+e_{21}=0.$$

Die Indices 12 und 33 treten nicht auf in:

$$(7)\quad \begin{array}{l|l} (31,32,22)(11,13,31)(23,22,13)=d_4 & (13,23,22)(11,31,13)(32,22,31)=e_4 \\ (31,32,22)(11,13,32)(21,23,13)=d_5 & (13,23,32)(11,21,13)(22,32,31)=e_7 \\ (32,21,22)(31,32,13)(11,13,23)=d_{39} & (13,22,32)(11,13,23)(21,32,31)=e_{27} \\ (32,22,23)(31,32,11)(11,13,23)=d_{45} & (23,22,32)(13,23,11)(11,31,32)=e_{45}. \end{array}$$

Hier ist $d_4+e_4=0$ und $d_{45}+e_{45}=0$.

Ferner ist:

$$d_5+e_7=(31,32,22)\{(23,13,21)(11,13,32)-(23,13,32)(11,13,21)\}=$$
$$=(31,32,22)(23,13,11)(21,13,32),$$

$$d_{39}+e_{27}=(11,13,23)\{(22,32,21)(31,32,13)-(22,32,13)(31,32,21)\}=$$
$$=(11,13,23)(22,32,31)(21,32,13),$$

also ist:

$$d_5+d_{39}+e_7+e_{27}=0.$$

Durch Vertauschen der Indices erhalte ich hieraus:

$$(8)\quad e_5+e_{39}+d_7+d_{27}=0.$$

Die Indices 12 und 21 fehlen in d_4, e_4, d_{45} und e_{45}, ferner in:

$$(9)\quad \begin{array}{l|l} (32,33,22)(11,13,31)(23,22,11)=d_{31} & (23,33,22)(11,31,13)(32,22,11)=e_{31} \\ (32,22,23)(31,33,11)(13,11,22)=d_{41} & (23,22,32)(13,33,11)(31,11,22)=e_{44}. \end{array}$$

$$d_{31}+e_{31}=(11,13,31)\{(22,33,32)(11,22,23)-(22,33,23)(11,22,32)\}=$$
$$=(11,13,31)(22,33,11)(32,22,23),$$

$$d_{44}+e_{44}=(32,22,23)\{(11,31,33)(13,11,22)-(11,31,22)(13,11,33)\}=$$
$$=(32,22,23)(11,31,13)(33,11,22).$$

Also ist:

$$d_{31} + d_{44} + e_{31} + e_{44} = 0.$$

Durch cyklisches Weiterschieben der Indices erhalte ich aus den Produkten in (7), (8) und (9):

$$\text{(7a)}\quad \begin{array}{l|l} (12,13,33)(22,21,12)(31,33,21) = d_{12} & (21,31,33)(22,12,21)(13,33,12) = e_{12} \\ (12,13,33)(22,21,13)(32,31,21) = d_{3} & (21,31,13)(22,32,21)(33,13,12) = e_{10} \\ (13,32,33)(12,13,21)(22,21,31) = d_{19} & (21,33,13)(22,21,31)(32,13,12) = e_{23} \\ (13,33,31)(12,13,22)(22,21,31) = d_{20} & (31,33,13)(21,31,22)(22,12,13) = e_{20}. \end{array}$$

Aus der Art der Entstehung folgt:

$$d_{12} + e_{12} = 0, \quad d_{20} + e_{20} = 0,$$
$$d_{3} + d_{19} + e_{10} + e_{23} = 0,$$
$$\text{(8a)}\qquad e_{3} + e_{19} + d_{10} + d_{23} = 0.$$

Ebenso ergiebt sich:

$$\text{(9a)}\quad \begin{array}{l|l} (13,11,33)(22,21,12)(31,33,22) = d_{15} & (31,11,33)(22,12,21)(13,33,22) = e_{15} \\ (13,33,31)(12,11,22)(21,22,33) = d_{47} & (31,33,13)(21,11,22)(12,22,33) = e_{47} \end{array}$$

$$d_{15} + d_{47} + e_{13} + e_{47} = 0.$$

Endlich ergiebt ein nochmaliges Weiterschieben:

$$\text{(7b)}\quad \begin{array}{l|l} (23,21,11)(33,32,23)(12,11,32) = d_{35} & (32,12,11)(33,23,32)(21,11,23) = e_{35} \\ (23,21,11)(33,32,21)(13,12,32) = d_{29} & (32,12,21)(33,13,32)(11,21,23) = e_{17} \\ (21,13,11)(23,21,32)(33,32,12) = d_{40} & (32,11,21)(33,32,12)(13,21,23) = e_{49} \\ (21,11,12)(23,21,33)(33,32,12) = d_{51} & (12,11,21)(32,12,33)(33,23,21) = e_{51}. \end{array}$$

$$d_{35} + e_{35} = 0, \quad d_{51} + e_{51} = 0,$$
$$d_{29} + d_{40} + e_{17} + e_{49} = 0,$$
$$\text{(8b)}\qquad e_{29} + e_{40} + d_{17} + d_{49} = 0.$$

$$\text{(9b)}\quad \begin{array}{l|l} (21,22,11)(33,32,23)(12,11,33) = d_{36} & (12,22,11)(33,23,32)(21,11,33) = e_{36} \\ (21,11,12)(23,22,33)(32,33,11) = d_{54} & (12,11,21)(32,22,33)(23,33,11) = e_{54} \end{array}$$

$$d_{36} + d_{54} + e_{36} + e_{54} = 0.$$

Auf diese Weise habe ich nun 48 Produkte der Determinante D mit 48 Produkten der Determinante E verglichen und bin zu dem Resultate gelangt, dafs die Summe aller den Wert Null hat. Es bleiben nun noch sechs Produkte in D, und ebensoviele in E, nämlich die, welchen die Substitutionen Nr. 9, 14, 25, 28, 41, 46 entsprechen. Ich schreibe sie folgendermafsen:

$d_9 = (31,32,23)(11,12,33)(21,22,13) = a$ | $e_9 = (13,23,32)(11,21,33)(12,22,31) = a'$
$d_{28} = (12,13,31)(22,23,11)(32,33,21) = b$ | $e_{28} = (21,31,13)(22,32,11)(23,33,12) = b'$
$d_{14} = (23,21,12)(33,31,22)(13,11,32) = c$ | $e_{14} = (32,12,21)(33,13,22)(31,11,23) = c'$
$d_{25} = (13,12,21)(33,32,11)(23,22,31) = \alpha$ | $e_{25} = (31,21,12)(33,23,11)(32,22,13) = \alpha'$
$d_{26} = (21,23,32)(11,13,22)(31,33,12) = \beta$ | $e_{26} = (12,32,23)(11,31,22)(13,33,21) = \beta'$
$d_{46} = (32,31,13)(22,21,33)(12,11,23) = \gamma$ | $e_{46} = (23,13,31)(22,12,33)(21,11,32) = \gamma'$.

Der Zusammenhang zwischen den Indices dieser zwölf Produkte ist folgender: b und c entstehen aus a durch cyklisches Verschieben der Ziffern 1, 2, 3. In derselben Weise entstehen β und γ aus α. α entsteht aus a, wenn man in letzterem 1 und 3 vertauscht, während 2 ungeändert bleibt. a', b', ... entstehen aus a, b, ... durch Vertauschen der Indices.

Ich werde jetzt den Beweis führen, dafs die folgende Identität besteht:

$$a + b + c + \alpha + \beta + \gamma + a' + b' + c' + \alpha' + \beta' + \gamma' = 0.$$

Zu diesem Zweck ermittele ich zunächst den Wert der folgenden Determinante:

$$(|32,23|,\ |33,11|,\ |13,21|).$$

Hierin bedeutet $|ik,\ lm|$ die Spalte

$$\begin{matrix} (ik,\ lm)_1 \\ (ik,\ lm)_2 \\ (ik,\ lm)_3 \end{matrix} \quad \text{aus den Minoren der Matrix:}$$

$$\left\| \begin{matrix} a_{ik} & b_{ik} & c_{ik} \\ a_{lm} & b_{lm} & c_{lm} \end{matrix} \right\|.$$

Ich multipliciere die obige Determinante mit $(13, 21, m)$, wo m eine ganz willkürlich gewählte Spalte bedeuten soll, und erhalte:

$$(|32,23|,\ |33,11|,\ |13,21|)\,(13,21,m) = \begin{vmatrix} (32,23,13) & (33,11,13) & 0 \\ (32,23,21) & (33,11,21) & 0 \\ (32,21,m) & (33,11,m) & (13,21,m) \end{vmatrix}.$$

Nun dividiere ich wieder auf beiden Seiten durch $(13, 21, m)$ und erhalte:

$$(10) \qquad (|32,23|,\ |33,11|,\ |13,21|) = (32,23,13)\,(33,11,21) - (32,23,21)\,(33,11,13).$$

Diese Determinante multipliciere ich mit $(31, 12, 22)$. Das Produkt bezeichne ich mit R. Es ergiebt sich:

$$(11a)\ R = (|32,23|,|33,11|,|13,21|)(31,12,22) = \begin{vmatrix} (32,23,31) & (33,11,31) & (13,21,31) \\ (32,23,12) & (33,11,12) & (13,21,12) \\ (32,23,22) & (33,11,22) & (13,21,22) \end{vmatrix} =$$

$$= (32,23,31)(33,11,12)(13,21,22) + (32,23,22)(33,11,31)(13,21,12)$$
$$+ (32,23,12)(33,11,22)(13,21,31) - (32,23,22)(33,11,12)(13,21,31)$$
$$- (32,23,31)(33,11,22)(13,21,12) - (32,23,12)(33,11,31)(13,21,22).$$

Der erste Summand in diesem Ausdruck ist a. — Andererseits ist nach (10):

$$(11b)\quad R = (32,23,13)(33,11,21)(31,12,22) - (32,23,21)(33,11,13)(31,12,22)$$
$$= -a' - (32,23,21)(33,11,13)(31,12,22).$$

Aus (11a) und (11b) ergiebt sich:

$$(12)\ a + a' = (32,23,22)(33,11,12)(13,21,31) + (32,23,31)(33,11,22)(13,21,12)$$
$$+ (32,23,12)(33,11,31)(13,21,22) - (32,23,12)(33,11,22)(13,21,31)$$
$$- (32,23,22)(33,11,31)(13,21,12) - (32,23,21)(33,11,13)(31,12,22).$$

Aus (12) nehme ich nun das zweite und das fünfte Glied:

$$(13,21,12)\{(33,11,22)(32,23,31) - (33,11,31)(32,23,22)\}$$
$$= (13,21,12)\{(33,11,32)(22,23,31) - (33,11,23)(22,32,31)\}$$
$$= -\alpha - (13,21,12)(33,11,23)(22,32,31).$$

Also haben wir:

$$(13)\qquad a + a' + \alpha = (32,23,22)(33,11,12)(13,21,31)$$
$$+ (32,23,12)(33,11,31)(13,21,22)$$
$$- (32,23,12)(33,11,22)(13,21,31)$$
$$- (32,23,21)(33,11,13)(31,12,22)$$
$$- (13,21,12)(33,11,23)(22,32,31).$$

Hieraus das dritte und erste Glied:

$$(13,21,31)\{(33,11,22)(23,32,12) - (33,11,12)(23,32,22)\}$$
$$= (13,21,31)\{(33,11,23)(22,32,12) - (33,11,32)(22,23,12)\},$$

folglich:

$$(14)\qquad a + a' + \alpha = (13,21,31)(33,11,23)(22,32,12)$$
$$+ (32,23,12)(33,11,31)(13,21,22)$$
$$- (13,21,31)(33,11,32)(22,23,12)$$
$$- (13,21,12)(33,11,23)(22,32,31).$$

Hieraus das erste und letzte Glied:

$$(33,11,23)\{(22,32,12)(13,21,31) - (22,32,31)(13,21,12)\}$$
$$= (33,11,23)\{(22,32,13)(12,21,31) - (22,32,21)(12,13,31)\}$$
$$= -\alpha' - (33,11,23)(22,32,21)(12,13,31).$$

So erhalten wir schliefslich die Formel:

$$(15)\quad a + a' + \alpha + \alpha' = (32,23,12)\,(33,11,31)\,(13,21,22) + (23,32,21)\,(33,11,13)\,(31,12,22) - (13,21,31)\,(33,11,32)\,(22,23,12) - (33,11,23)\,(22,32,21)\,(12,13,31).$$

Wenn ich hier 3 und 1 vertausche, während 2 ungeändert bleibt, so entsteht die Formel:

$$(15a)\quad \alpha + \alpha' + a + a' = (12,21,32)\,(11,33,13)\,(31,23,22) + (21,12,23)\,(11,33,31)\,(13,32,22) - (31,23,13)\,(11,33,12)\,(22,21,32) - (11,33,21)\,(22,12,23)\,(32,31,13).$$

Durch cyklische Verschiebung erhalte ich aus (15) und (15a):

$$(16)\quad b + b' + \beta + \beta' = (13,31,23)\,(11,22,12)\,(21,32,33) + (31,13,32)\,(11,22,21)\,(12,23,33) - (21,32,12)\,(11,22,13)\,(33,11,23) - (11,22,31)\,(33,13,32)\,(23,21,12).$$

$$(16a)\quad \beta + \beta' + b + b' = (23,32,13)\,(22,11,21)\,(12,31,33) + (32,23,31)\,(22,11,12)\,(21,13,33) - (12,31,21)\,(22,11,23)\,(33,32,13) - (22,11,32)\,(33,23,31)\,(13,12,21).$$

$$(17)\quad c + c' + \gamma + \gamma' = (21,12,31)\,(22,33,23)\,(32,13,11) + (12,21,13)\,(22,33,32)\,(23,31,11) - (32,13,23)\,(22,33,21)\,(11,12,31) - (22,33,12)\,(11,21,13)\,(31,32,23).$$

$$(17a)\quad \gamma + \gamma' + c + c' = (31,13,21)\,(33,22,32)\,(23,12,11) + (13,31,12)\,(33,22,23)\,(32,21,11) - (23,12,32)\,(33,22,31)\,(11,13,21) - (33,11,13)\,(11,31,12)\,(21,23,32).$$

Nun addiere ich (15a) und (16) und fasse die Glieder zusammen, welche Faktoren gemeinsam haben:

$$(18)\quad a + a' + \alpha + \alpha' + b + b' + \beta + \beta' =$$
$$= (12,21,32)\{(31,23,22)(13,11,33) - (31,23,33)\,(13,11,22)\} + (21,12,23)\{(13,32,22)(31,11,33) - (13,32,33)\,(31,11,22)\} + (13,31,23)\{(21,32,33)(12,11,22) - (21,32,22)\,(12,11,33)\} + (31,13,23)\{(12,23,33)(21,11,22) - (12,23,22)\,(21,11,33)\}.$$

Hieraus ergiebt sich:

$$(19)\quad a + a' + \alpha + \alpha' + b + b' + \beta + \beta' =$$
$$= (12,21,32)\{(31,23,13)(22,11,33) - (31,23,11)(22,13,33)\}$$
$$+ (21,12,23)\{(13,32,31)(22,11,33) - (13,32,11)(22,31,33)\}$$
$$+ (13,31,23)\{(21,32,12)(33,11,22) - (21,32,11)(33,12,22)\}$$
$$+ (31,13,32)\{(12,23,21)(33,11,22) - (12,23,11)(33,21,22)\}$$
$$= (12,21,32)(23,31,11)(22,13,33) + (21,12,23)(32,13,11)(22,31,33)$$
$$+ (13,31,23)(32,21,11)(33,12,22) + (31,13,32)(23,12,11)(33,21,22);$$

denn der 1. Summand in (19) hebt sich gegen den 5., der 3. gegen den 7. Endlich addiere ich (17a) und (19) und erhalte:

$$(20)\quad a + a' + b + b' + c + c' + \alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \gamma + \gamma' =$$
$$= (23,12,11)\{(33,22,32)(31,13,21) - (33,22,21)(31,13,32)\}$$
$$+ (32,21,11)\{(33,22,23)(13,31,12) - (33,22,12)(13,31,23)\}$$
$$+ (33,22,31)\{(23,12,21)(11,13,32) - (11,13,21)(23,12,32)\}$$
$$+ (33,22,13)\{(32,21,12)(11,31,23) - (11,31,12)(32,21,23)\}$$
$$= (23,12,11)\{(32,22,31)(32,13,21) - (33,22,13)(32,31,21)\}$$
$$+ (32,21,11)\{(33,22,13)(23,31,12) - (33,22,31)(23,13,12)\}$$
$$+ (33,22,31)\{(23,12,11)(21,13,32) - (23,12,13)(21,11,32)\}$$
$$+ (33,22,13)\{(32,21,11)(12,31,23) - (32,21,31)(12,11,23)\} = 0;$$

denn der 1. Summand hebt sich gegen den 5., der 2. gegen den 8., der 3. gegen den 7., der 4. gegen den 6.

Damit ist nun endgültig gezeigt, welcher Zusammenhang zwischen D und E besteht. Für alle Werte der a, b, c gilt die Gleichung:

$$(21)\qquad D + E = 0.$$

Da man nun nach den Resultaten auf S. 9 u. flg. durch eine und dieselbe Umwandlung der Elemente D_α in $-E_A$ und E_α in F_A überführen kann, so folgt:

$$(22)\qquad E = F.$$

Von diesen Resultaten will ich nun noch zwei Anwendungen machen; die eine besteht in der Auswertung einer Determinante, die andere in der Ableitung einiger Determinanten-Identitäten.

Die Determinante, die jetzt ausgewertet werden soll, entsteht aus D durch Annahme der folgenden speciellen Werte:

$$
\begin{array}{lll}
a_{11} = 0 & a_{21} = 0 & a_{31} = 0 \\
a_{12} = -a_{13} & a_{22} = -a_{23} & a_{32} = -a_{33} \\
a_{13} = a_{12} & a_{23} = a_{22} & a_{33} = a_{32} \\
b_{11} = a_{13} & b_{21} = a_{23} & b_{31} = a_{33} \\
b_{12} = 0 & b_{22} = 0 & b_{32} = 0 \\
b_{13} = -a_{11} & b_{23} = -a_{21} & b_{33} = -a_{31} \\
c_{11} = -a_{12} & c_{21} = -a_{22} & c_{31} = -a_{32} \\
c_{12} = a_{11} & e_{22} = a_{21} & c_{32} = a_{31} \\
c_{13} = 0 & c_{23} = 0 & c_{33} = 0 .
\end{array}
$$

Tragen wir diese Werte ein, so erhalten wir die folgende Determinante:

$$
H = \begin{vmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & a_{33} & -a_{32} & 0 & -a_{23} & a_{22} \\
0 & 0 & 0 & -a_{33} & 0 & a_{31} & a_{23} & 0 & -a_{21} \\
0 & 0 & 0 & a_{32} & -a_{31} & 0 & -a_{22} & a_{21} & 0 \\
0 & -a_{33} & a_{32} & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{13} & -a_{12} \\
a_{33} & 0 & -a_{31} & 0 & 0 & 0 & -a_{13} & 0 & a_{11} \\
-a_{32} & a_{31} & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{12} & -a_{11} & 0 \\
0 & a_{23} & -a_{22} & 0 & -a_{13} & a_{12} & 0 & 0 & 0 \\
-a_{33} & 0 & a_{21} & a_{13} & 0 & -a_{11} & 0 & 0 & 0 \\
a_{22} & -a_{21} & 0 & -a_{12} & a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0
\end{vmatrix} .
$$

Stelle ich überall die Indices um, so erhalte ich nach (21):

$$
-H = \begin{vmatrix}
0 & 0 & 0 & -a_{12} & -a_{22} & -a_{32} & -a_{13} & -a_{23} & -a_{33} \\
0 & 0 & 0 & a_{11} & a_{21} & a_{31} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{11} & a_{21} & a_{31} \\
a_{12} & a_{22} & a_{32} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-a_{11} & -a_{21} & -a_{31} & 0 & 0 & 0 & -a_{13} & -a_{23} & -a_{33} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{12} & a_{22} & a_{32} \\
a_{13} & a_{23} & a_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & a_{13} & a_{23} & a_{33} & 0 & 0 & 0 \\
-a_{11} & -a_{21} & -a_{31} & -a_{12} & -a_{22} & -a_{32} & 0 & 0 & 0
\end{vmatrix} .
$$

Ich subtrahiere die sechste und neunte Zeile von der ersten und ordne die Zeilen passend um:

$$\begin{vmatrix}
2a_{11} & 2a_{21} & 2a_{31} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
a_{12} & a_{22} & a_{32} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
a_{13} & a_{23} & a_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & a_{11} & a_{21} & a_{31} & 0 & 0 & 0 \\
a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{12} & a_{22} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & a_{13} & a_{23} & a_{33} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{11} & a_{21} & a_{31} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{12} & a_{22} & a_{32} \\
a_{11} & a_{21} & a_{31} & 0 & 0 & 0 & a_{13} & a_{23} & a_{33}
\end{vmatrix}.$$

Der Modul der Substitution ist:

$$\operatorname{mod}\begin{pmatrix}1\,4\,7\,2\,9\,8\,3\,6\,5\\1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9\end{pmatrix} = (24)\,(37)\,(59)\,(68) = +\,1.$$

Somit erhalten wir das Resultat:

$$-H = 2\Delta^3 \quad \text{oder} \quad H = -\,2\Delta^3,$$

wenn ich $(a_{\varkappa 1}, a_{\varkappa 2}, a_{\varkappa 3})$ mit Δ bezeichne. Ich bin also zu demselben Resultat gelangt, wie Herr Pasch (Math. Ann. 1891 Bd. 38, S. 41 u. 42), der diese Determinante bereits auf zwei Arten ausgewertet hat.

Nun die zweite Anwendung. Ich entwickele F und G nach dem Laplaceschen Zerlegungssatze nach drei Systemen von je drei Zeilen. Von den auftretenden Produkten betrachte ich nur diejenigen, welche sämtliche Spaltenindices, nämlich $a_{1\varkappa}$, $a_{2\varkappa}$, $a_{3\varkappa}$, $b_{1\varkappa}$, $b_{2\varkappa}$, $b_{3\varkappa}$, $c_{1\varkappa}$, $c_{2\varkappa}$, $c_{3\varkappa}$ enthalten. In jeder der beiden Determinanten sind sechs derartige Produkte. Von den übrigen 96 Produkten in E, F und G kann man leicht zeigen — indem man die Elemente passender Spalten gleich Null setzt —, dafs ihre Summe den Wert Null hat. Dann verschwindet aber auch die Summe der zwölf ausgesonderten Produkte, d. h. es besteht die folgende Identität:

$$\begin{aligned}
&(c_{1\varkappa}, c_{2\varkappa}, b_{3\varkappa})\,(a_{1\varkappa}, a_{2\varkappa}, c_{3\varkappa})\,(b_{1\varkappa}, b_{2\varkappa}, a_{3\varkappa})\\
+\,&(c_{\varkappa 1}, c_{\varkappa 2}, b_{\varkappa 3})\,(a_{\varkappa 1}, a_{\varkappa 2}, c_{\varkappa 3})\,(b_{\varkappa 1}, b_{\varkappa 2}, a_{\varkappa 3})\\
+\,&(a_{2\varkappa}, a_{3\varkappa}, c_{1\varkappa})\,(b_{2\varkappa}, b_{3\varkappa}, a_{1\varkappa})\,(c_{2\varkappa}, c_{3\varkappa}, b_{1\varkappa})\\
+\,&(a_{\varkappa 2}, a_{\varkappa 3}, c_{\varkappa 1})\,(b_{\varkappa 2}, b_{\varkappa 3}, a_{\varkappa 1})\,(c_{\varkappa 2}, c_{\varkappa 3}, b_{\varkappa 1})\\
+\,&(b_{3\varkappa}, b_{1\varkappa}, a_{2\varkappa})\,(c_{3\varkappa}, c_{1\varkappa}, b_{2\varkappa})\,(a_{3\varkappa}, a_{1\varkappa}, c_{2\varkappa})\\
+\,&(b_{\varkappa 3}, b_{\varkappa 1}, a_{\varkappa 2})\,(c_{\varkappa 3}, c_{\varkappa 1}, b_{\varkappa 2})\,(a_{\varkappa 3}, a_{\varkappa 1}, c_{\varkappa 2})\\
+\,&(a_{3\varkappa}, a_{2\varkappa}, b_{1\varkappa})\,(c_{3\varkappa}, c_{2\varkappa}, a_{1\varkappa})\,(b_{3\varkappa}, b_{2\varkappa}, c_{1\varkappa})\\
+\,&(a_{\varkappa 3}, a_{\varkappa 2}, b_{\varkappa 1})\,(c_{\varkappa 3}, c_{\varkappa 2}, a_{\varkappa 1})\,(b_{\varkappa 3}, b_{\varkappa 2}, c_{\varkappa 1})\\
+\,&(b_{1\varkappa}, b_{3\varkappa}, c_{2\varkappa})\,(a_{1\varkappa}, a_{3\varkappa}, b_{2\varkappa})\,(c_{1\varkappa}, c_{3\varkappa}, a_{2\varkappa})\\
+\,&(b_{\varkappa 1}, b_{\varkappa 3}, c_{\varkappa 2})\,(a_{\varkappa 1}, a_{\varkappa 3}, b_{\varkappa 2})\,(c_{\varkappa 1}, c_{\varkappa 3}, a_{\varkappa 2})\\
+\,&(c_{2\varkappa}, c_{1\varkappa}, a_{3\varkappa})\,(b_{2\varkappa}, b_{1\varkappa}, c_{3\varkappa})\,(a_{2\varkappa}, a_{1\varkappa}, b_{3\varkappa})\\
+\,&(c_{\varkappa 2}, c_{\varkappa 1}, a_{\varkappa 3})\,(b_{\varkappa 2}, b_{\varkappa 1}, c_{\varkappa 3})\,(a_{\varkappa 2}, a_{\varkappa 1}, b_{\varkappa 3}) = 0.
\end{aligned}$$

Auf diese Identität will ich diejenige Umformung anwenden, vermittelst deren man F in D überführen kann. Dann erhalte ich:

$$\begin{aligned}
&(31,32,23)(11,12,33)(21,22,13) + (a_{3\varkappa}, b_{3\varkappa}, c_{2\varkappa})(a_{1\varkappa}, b_{1\varkappa}, c_{3\varkappa})(a_{2\varkappa}, b_{2\varkappa}, c_{1\varkappa}) \\
&+ (12,13,31)(22,23,11)(32,33,21) + (b_{1\varkappa}, c_{1\varkappa}, a_{3\varkappa})(b_{2\varkappa}, c_{2\varkappa}, a_{1\varkappa})(b_{3\varkappa}, c_{3\varkappa}, a_{2\varkappa}) \\
&+ (23,21,12)(33,31,22)(13,11,32) + (c_{2\varkappa}, a_{2\varkappa}, b_{1\varkappa})(c_{3\varkappa}, a_{3\varkappa}, b_{2\varkappa})(c_{1\varkappa}, a_{1\varkappa}, b_{3\varkappa}) \\
&+ (13,12,21)(33,32,11)(23,22,31) + (c_{1\varkappa}, b_{1\varkappa}, a_{2\varkappa})(c_{3\varkappa}, b_{3\varkappa}, a_{1\varkappa})(c_{2\varkappa}, b_{2\varkappa}, a_{3\varkappa}) \\
&+ (21,23,32)(11,13,22)(31,33,12) + (a_{2\varkappa}, c_{2\varkappa}, b_{3\varkappa})(a_{1\varkappa}, c_{1\varkappa}, b_{2\varkappa})(a_{3\varkappa}, c_{3\varkappa}, b_{1\varkappa}) \\
&+ (32,31,13)(22,21,33)(12,11,23) + (b_{3\varkappa}, a_{3\varkappa}, c_{1\varkappa})(b_{2\varkappa}, a_{2\varkappa}, c_{3\varkappa})(b_{1\varkappa}, a_{1\varkappa}, c_{2\varkappa}) = 0.
\end{aligned}$$

Wende ich auf diese Identität noch einmal dieselbe Umformung an, so ergiebt sich:

$$\begin{aligned}
&(a_{\varkappa 3}, b_{\varkappa 3}, c_{\varkappa 2})(a_{\varkappa 1}, b_{\varkappa 1}, c_{\varkappa 3})(a_{\varkappa 2}, b_{\varkappa 2}, c_{\varkappa 1}) + (13,23,32)(11,21,33)(12,22,31) \\
&+ (b_{\varkappa 1}, c_{\varkappa 1}, a_{\varkappa 3})(b_{\varkappa 2}, c_{\varkappa 2}, a_{\varkappa 1})(b_{\varkappa 3}, c_{\varkappa 3}, a_{\varkappa 2}) + (21,31,13)(22,32,11)(23,33,12) \\
&+ (c_{\varkappa 2}, a_{\varkappa 2}, b_{\varkappa 1})(c_{\varkappa 3}, a_{\varkappa 3}, b_{\varkappa 2})(c_{\varkappa 1}, a_{\varkappa 1}, b_{\varkappa 3}) + (32,12,21)(33,13,22)(31,11,23) \\
&+ (c_{\varkappa 1}, b_{\varkappa 1}, a_{\varkappa 2})(c_{\varkappa 3}, b_{\varkappa 3}, a_{\varkappa 1})(c_{\varkappa 2}, b_{\varkappa 2}, a_{\varkappa 3}) + (31,21,12)(33,23,11)(32,22,13) \\
&+ (a_{\varkappa 2}, c_{\varkappa 2}, b_{\varkappa 3})(a_{\varkappa 1}, c_{\varkappa 1}, b_{\varkappa 2})(a_{\varkappa 3}, c_{\varkappa 3}, b_{\varkappa 1}) + (12,32,23)(11,31,22)(13,33,21) \\
&+ (b_{\varkappa 3}, a_{\varkappa 3}, c_{\varkappa 1})(b_{\varkappa 2}, a_{\varkappa 2}, c_{\varkappa 3})(b_{\varkappa 1}, a_{\varkappa 1}, c_{\varkappa 2}) + (23,13,31)(22,12,33)(21,11,32) = 0.
\end{aligned}$$

Durch Addition der beiden letzteren Identitäten erhält man mit Benutzung von (20):

$$\begin{aligned}
&(a_{3\varkappa}, b_{3\varkappa}, c_{2\varkappa})(a_{1\varkappa}, b_{1\varkappa}, c_{3\varkappa})(a_{2\varkappa}, b_{2\varkappa}, c_{1\varkappa}) \\
&+ (a_{\varkappa 3}, b_{\varkappa 3}, c_{\varkappa 2})(a_{\varkappa 1}, b_{\varkappa 1}, c_{\varkappa 3})(a_{\varkappa 2}, b_{\varkappa 2}, c_{\varkappa 1}) \\
&+ (b_{1\varkappa}, c_{1\varkappa}, a_{3\varkappa})(b_{2\varkappa}, c_{2\varkappa}, a_{1\varkappa})(b_{3\varkappa}, c_{3\varkappa}, a_{2\varkappa}) \\
&+ (b_{\varkappa 1}, c_{\varkappa 1}, a_{\varkappa 3})(b_{\varkappa 2}, c_{2\varkappa}, a_{\varkappa 1})(b_{\varkappa 3}, c_{\varkappa 3}, a_{\varkappa 2}) \\
&+ (c_{2\varkappa}, a_{2\varkappa}, b_{1\varkappa})(c_{3\varkappa}, a_{3\varkappa}, b_{2\varkappa})(c_{1\varkappa}, a_{1\varkappa}, b_{3\varkappa}) \\
&+ (c_{\varkappa 2}, a_{\varkappa 2}, b_{\varkappa 1})(c_{\varkappa 3}, a_{\varkappa 3}, b_{\varkappa 2})(c_{\varkappa 1}, a_{\varkappa 1}, b_{\varkappa 3}) \\
&+ (c_{1\varkappa}, b_{1\varkappa}, a_{2\varkappa})(c_{3\varkappa}, b_{3\varkappa}, a_{1\varkappa})(c_{2\varkappa}, b_{2\varkappa}, a_{3\varkappa}) \\
&+ (c_{\varkappa 1}, b_{\varkappa 1}, a_{\varkappa 2})(c_{\varkappa 3}, b_{\varkappa 3}, a_{\varkappa 1})(c_{\varkappa 2}, b_{\varkappa 2}, a_{\varkappa 3}) \\
&+ (a_{2\varkappa}, c_{2\varkappa}, b_{3\varkappa})(a_{1\varkappa}, c_{1\varkappa}, b_{2\varkappa})(a_{3\varkappa}, c_{3\varkappa}, b_{1\varkappa}) \\
&+ (a_{\varkappa 2}, c_{\varkappa 2}, b_{\varkappa 3})(a_{\varkappa 1}, c_{\varkappa 1}, b_{\varkappa 2})(a_{\varkappa 3}, c_{\varkappa 3}, b_{\varkappa 1}) \\
&+ (b_{3\varkappa}, a_{3\varkappa}, c_{1\varkappa})(b_{2\varkappa}, a_{2\varkappa}, c_{3\varkappa})(b_{1\varkappa}, a_{1\varkappa}, c_{2\varkappa}) \\
&+ (b_{\varkappa 3}, a_{\varkappa 3}, c_{\varkappa 1})(b_{\varkappa 2}, a_{\varkappa 2}, c_{\varkappa 3})(b_{\varkappa 1}, a_{\varkappa 1}, c_{\varkappa 2}) \equiv 0.
\end{aligned}$$

III. Beziehungen zwischen den Substitutionsdeterminanten.

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dafs unsere drei Formen — bezw. unsere ternäre Form — sich durch die lineare Substitution

$$y_\varkappa = \sum p_{\varkappa\iota}\eta_\iota$$

gleichzeitig in symmetrische überführen lassen, dafs also unsere trilineare Form in eine teilweise symmetrische übergeht, ist

(1) $$D = 0 \quad \text{und} \quad P \neq 0.$$

Als notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dafs man dasselbe erreichen kann durch die Transformation:

$$x_\varkappa = \sum p'_{\iota\varkappa}\xi_\iota,$$

ergiebt sich:

(2) $$E = 0 \quad \text{und} \quad P' \neq 0.$$

Dabei ist:

$$P = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{vmatrix}$$

$$P' = \begin{vmatrix} p'_{11} & p'_{21} & p'_{31} \\ p'_{12} & p'_{22} & p'_{32} \\ p'_{13} & p'_{23} & p'_{33} \end{vmatrix}.$$

Nun habe ich bereits auf S. 7 den Satz angeführt:

Wenn man drei bilineare ternäre Formen gleichzeitig in symmetrische verwandeln kann durch lineare Transformation der einen Reihe von Variabeln, so kann man stets dasselbe erreichen durch lineare Transformation der andern Reihe.

Diesen Satz kann ich jetzt kurz so aussprechen:

Wenn (1) erfüllt ist, dann ist auch (2) erfüllt, und umgekehrt.

Ferner: Wenn

(3) $$D = 0 \quad \text{und jedes} \quad P = 0,$$

dann ist auch

(4) $$E = 0 \quad \text{und jedes} \quad P' = 0.$$

Dabei habe ich, wie man sieht, das Resultat aus Kap. I benutzt:

$$D + E = 0.$$

Aus (1), (2), (3) und (4) ergiebt sich nun der Satz:

Die Determinanten P und P' stehen in dem Zusammenhange, dafs das Verschwinden aller Werte der einen stets das Verschwinden aller Werte der andern zur Folge hat.

Unsere Schlufsfolgerungen haben indessen nur dann Gültigkeit, wenn der auf S. 7 und 23 angegebene Satz richtig ist. Um diesen Satz in allgemeinster Form zu beweisen, verfahre ich so: Ich beweise zunächst, dafs zwischen P und P' thatsächlich der oben beschriebene Zusammenhang besteht. Verbinde ich alsdann mit diesem Satz die Gl. (21) des I. Kapitels, so folgt, dafs die Bedingungen (1) und (2), bezw. (3) und (4), stets gleichzeitig erfüllt sind, und damit ist der in Frage stehende Satz bewiesen.

Es sei:

$$\begin{aligned} -\sum a_{3\varkappa} p_{\varkappa 2} + \sum a_{2\varkappa} p_{\varkappa 3} &= \varDelta_1, \\ \sum a_{3\varkappa} p_{\varkappa 1} - \sum a_{1\varkappa} p_{\varkappa 3} &= \varDelta_4, \\ -\sum a_{2\varkappa} p_{\varkappa 1} + \sum a_{1\varkappa} p_{\varkappa 2} &= \varDelta_7. \end{aligned}$$

Dann erhalte ich unter der Voraussetzung, dafs P (d. h. das System der Elemente von P) nicht erster Stufe ist, und $p'_{ik} = \operatorname{adj} p_{ik}$ in P:

$$\mathsf{E}_1 = -\sum a_{\varkappa 3} p'_{2\varkappa} + \sum a_{\varkappa 2} p'_{3\varkappa} = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{31} & a_{13} \\ p_{12} & p_{32} & a_{23} \\ p_{13} & p_{33} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_{11} & p_{21} & a_{12} \\ p_{12} & p_{22} & a_{22} \\ p_{13} & p_{23} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned} &= p_{11}[a_{33}p_{32} + a_{32}p_{22} - a_{23}p_{33} - a_{22}p_{23}] \\ &+ p_{12}[a_{13}p_{33} + a_{12}p_{23} - a_{33}p_{31} - a_{32}p_{21}] \\ &+ p_{13}[a_{23}p_{31} + a_{22}p_{21} - a_{13}p_{32} - a_{12}p_{22}] \\ &= p_{11}[-\varDelta_1 - a_{31}p_{12} + a_{21}p_{13}] \\ &+ p_{12}[-\varDelta_4 - a_{11}p_{13} + a_{31}p_{11}] \\ &+ p_{13}[-\varDelta_7 - a_{21}p_{11} + a_{11}p_{12}] \\ &= -(p_{11}\varDelta_1 + p_{12}\varDelta_4 + p_{13}\varDelta_7). \end{aligned}$$

Ferner ist:

$$\mathsf{E}_4 = \sum a_{\varkappa 3} p'_{1\varkappa} - \sum a_{\varkappa 1} p'_{3\varkappa} = \begin{vmatrix} p_{21} & p_{31} & a_{13} \\ p_{22} & p_{32} & a_{23} \\ p_{23} & p_{33} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_{21} & p_{11} & a_{11} \\ p_{22} & p_{12} & a_{21} \\ p_{23} & p_{13} & a_{31} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned} &= p_{21}[a_{33}p_{32} + a_{31}p_{12} - a_{23}p_{33} - a_{21}p_{13}] \\ &+ p_{22}[a_{13}p_{33} + a_{11}p_{13} - a_{33}p_{31} - a_{31}p_{11}] \\ &+ p_{23}[a_{23}p_{31} + a_{21}p_{11} - a_{13}p_{32} - a_{11}p_{12}] \\ &= p_{21}[-\varDelta_1 - a_{32}p_{22} + a_{22}p_{23}] \\ &+ p_{22}[-\varDelta_4 - a_{12}p_{23} + a_{32}p_{21}] \\ &+ p_{23}[-\varDelta_7 - a_{22}p_{21} + a_{12}p_{22}] \\ &= -(p_{21}\varDelta_1 + p_{22}\varDelta_4 + p_{23}\varDelta_7). \end{aligned}$$

In derselben Weise ergiebt sich:

$$\mathsf{E}_7 = -\sum a_{2\varkappa} p'_{1\varkappa} + \sum a_{\varkappa 1} p'_{2\varkappa} = -(p_{31}\Delta_1 + p_{32}\Delta_4 + p_{33}\Delta_7).$$

Ferner, wenn ich alle $a_{i\varkappa}$ durch b_{ik} bezw. c_{ik} ersetze:

$$\begin{aligned}
-\mathsf{E}_2 &= p_{11}\Delta_2 + p_{12}\Delta_5 + p_{13}\Delta_8 \\
-\mathsf{E}_5 &= p_{21}\Delta_2 + p_{22}\Delta_5 + p_{23}\Delta_8 \\
-\mathsf{E}_8 &= p_{31}\Delta_2 + p_{32}\Delta_5 + p_{33}\Delta_8 \\
-\mathsf{E}_3 &= p_{11}\Delta_3 + p_{12}\Delta_6 + p_{13}\Delta_9 \\
-\mathsf{E}_6 &= p_{21}\Delta_3 + p_{22}\Delta_6 + p_{23}\Delta_9 \\
-\mathsf{E}_9 &= p_{31}\Delta_3 + p_{32}\Delta_6 + p_{33}\Delta_9.
\end{aligned}$$

Setze ich alle $\Delta_\lambda = 0$, dann werden auch alle $\mathsf{E}_\lambda = 0$, und somit gilt der Satz:

Wenn die Gröfsen

$$p_{11},\ p_{21},\ p_{31},\quad p_{12},\ p_{22},\ p_{32},\quad p_{13},\ p_{23},\ p_{33},$$

mit den Zeilen von D komponiert, stets den Wert Null ergeben, so ergeben die Gröfsen

$$p'_{11},\ p'_{12},\ p'_{13},\quad p'_{21},\ p'_{22},\ p'_{23},\quad p'_{31},\ p'_{32},\ p'_{33},$$

mit den Zeilen von E komponiert, ebenfalls den Wert Null, sobald P nicht erster Stufe und $p'_{ik} = \operatorname{adj} p_{ik}$ in P ist.

Stelle ich in der eben gegebenen Beweisführung sämtliche Indices um, so erhalte ich die Umkehrung des eben ausgesprochenen Satzes.

Wird P erster Stufe, so müssen sich, da $D + E = 0$ ist, stets auch Gröfsen p'_{ik} angeben lassen, die, in der angegebenen Weise mit den Zeilen von E komponiert, den Wert Null ergeben. Sind nun alle P erster Stufe, so kann nach den obigen Sätzen kein P' dritter Stufe sein.

Ich will direkt beweisen, dafs jeder zu E gehörigen Determinante P', welche erster Stufe ist, mindestens eine Determinante P entspricht, die zu D gehört und zweiter oder erster Stufe ist.

Ich mache also die folgenden Voraussetzungen:

$$\text{(5)} \qquad \mathsf{E}_1 = -\sum a_{\varkappa 3} p'_{2\varkappa} + \sum a_{\varkappa 2} p'_{3\varkappa} = 0,$$

desgleichen alle übrigen $\mathsf{E}_\lambda = 0$:

$$P' = \begin{vmatrix} \varrho p'_{31} & \varrho p'_{32} & \varrho p'_{33} \\ \sigma p'_{31} & \sigma p'_{32} & \sigma p'_{33} \\ p'_{31} & p'_{32} & p'_{33} \end{vmatrix}.$$

Dabei mögen ϱ und σ ganz beliebig sein, und mindestens eines der $p'_{3\varkappa}$, etwa p'_{31}, von Null verschieden. Andere Fälle würden sich in ganz ähnlicher Weise behandeln lassen.

Nun bilde ich mir eine Determinante Π zweiter Stufe, deren Adjungierte P' ist. Die Resultate der Komposition der Elemente π_{ik} von Π mit den Zeilen in D nenne ich Δ'_λ.

Dann ist nach S. 24 u. 25:

$$
\begin{aligned}
-\mathsf{E}_1 &= \pi_{11}\Delta_1' + \pi_{12}\Delta_4' + \pi_{13}\Delta_7' \\
-\mathsf{E}_4 &= \pi_{21}\Delta_1' + \pi_{22}\Delta_4' + \pi_{23}\Delta_7' \\
-\mathsf{E}_7 &= \pi_{31}\Delta_1' + \pi_{32}\Delta_4' + \pi_{33}\Delta_7'.
\end{aligned}
$$

Da alle $\mathsf{E}_\lambda = 0$ sind, so folgt:

$$
(7) \qquad \left\{
\begin{aligned}
\Delta_1' &= \varkappa p'_{31} \\
\Delta_4' &= \varkappa p'_{32} \\
\Delta_7' &= \varkappa p'_{33},
\end{aligned}
\right.
$$

ebenso ist:

$$
(8) \qquad \left\{
\begin{aligned}
\Delta_2' &= \lambda p'_{31} \\
\Delta_5' &= \lambda p'_{32} \\
\Delta_8' &= \lambda p'_{33}
\end{aligned}
\right.
\qquad \text{und (9)} \qquad
\left\{
\begin{aligned}
\Delta_3' &= \mu p'_{31} \\
\Delta_6' &= \mu p'_{32} \\
\Delta_9' &= \mu p'_{33}.
\end{aligned}
\right.
$$

Offenbar gelten die Gleichungen (7), (8) und (9) für alle Determinanten Π von der oben angegebenen Beschaffenheit. Bilde ich also die Determinante:

$$
\Pi_1 = \begin{vmatrix}
\varkappa_1\pi_{11} + \varkappa_2\pi_{21} & \varkappa_3\pi_{11} + \varkappa_4\pi_{21} & f(11, 12) \\
\varkappa_1\pi_{12} + \varkappa_2\pi_{22} & \varkappa_3\pi_{12} + \varkappa_4\pi_{22} & f(21, 22) \\
\varkappa_1\pi_{13} + \varkappa_2\pi_{23} & \varkappa_3\pi_{13} + \varkappa_4\pi_{23} & f(31, 32)
\end{vmatrix},
$$

wobei $f(n1, n2)$ die Bedeutung hat:

$$
f(n1, n2) = -\varrho(\varkappa_1\pi_{1n} + \varkappa_2\pi_{2n}) - \sigma(\varkappa_3\pi_{1n} + \varkappa_4\pi_{2n}),
$$

so gelten die Beziehungen (7), (8) und (9) auch für Π_1, sobald nur die ersten Spalten nicht proportional sind, d. h. sobald $\begin{vmatrix} \varkappa_1 & \varkappa_2 \\ \varkappa_3 & \varkappa_4 \end{vmatrix} \neq 0$ ist.

Dasselbe gilt für:

$$
\Pi_2 = \begin{vmatrix}
\varkappa_1'\pi_{11} + \varkappa_2\pi_{21} & \varkappa_3'\pi_{11} + \varkappa_4\pi_{21} & f(11, 12) \\
\varkappa_1'\pi_{12} + \varkappa_2\pi_{22} & \varkappa_3'\pi_{12} + \varkappa_4\pi_{22} & f(21, 22) \\
\varkappa_1'\pi_{13} + \varkappa_2\pi_{23} & \varkappa_3'\pi_{13} + \varkappa_4\pi_{23} & f(31, 32)
\end{vmatrix},
$$

sobald $\begin{vmatrix} \varkappa_1' & \varkappa_2 \\ \varkappa_3' & \varkappa_4 \end{vmatrix} \neq 0$ ist. Hier bedeutet

$$
f(n1, n2) = -\varrho(\varkappa_1'\pi_{1n} + \varkappa_2\pi_{2n}) - \sigma(\varkappa_3'\pi_{1n} + \varkappa_4\pi_{2n}).
$$

Bilde ich nun aus den entsprechenden Elementen von Π_1 und Π_2 die Differenzen, so erhalte ich die Determinante:

$$\Pi_3 = \begin{vmatrix} (\varkappa_1 - \varkappa_1')\pi_{11} & (\varkappa_3 - \varkappa_3')\pi_{11} & f(11,12) \\ (\varkappa_1 - \varkappa_1')\pi_{12} & (\varkappa_3 - \varkappa_3')\pi_{12} & f(21,22) \\ (\varkappa_1 - \varkappa_1')\pi_{13} & (\varkappa_3 - \varkappa_3')\pi_{13} & f(31,32) \end{vmatrix}.$$

Dabei hat man:

$$f(n1, n2) = -\varrho(\varkappa_1 - \varkappa_1')\pi_{1n} - \sigma(\varkappa_3 - \varkappa_3')\pi_{1n}.$$

Π_3 ist erster Stufe, aber die Gleichungen (7), (8) und (9) behalten auch für diese Determinante ihre Gültigkeit. Beweis:

Die Elemente von Π_1 mögen, mit den Zeilen von D komponiert, die Werte Δ_λ' liefern, die Elemente von Π_2 die Werte Δ_λ''; dann liefern die Elemente von Π_3 die Werte $\Delta_\lambda' - \Delta_\lambda''$. Folglich ist

$$(7') \qquad \begin{aligned} \Delta_1' - \Delta_1'' &= (\varkappa' - \varkappa'')p_{31}' \\ \Delta_4' - \Delta_4'' &= (\varkappa' - \varkappa'')p_{32}' \\ \Delta_7' - \Delta_7'' &= (\varkappa' - \varkappa'')p_{33}', \end{aligned}$$

d. h. (7) gilt auch jetzt noch.

In gleicher Weise läſst sich die Gültigkeit von (8) und (9) zeigen.

Ich kehre wieder zur Determinante Π_1 zurück. Die Resultate der Komposition ihrer Elemente mit den Zeilen von D seien:

$$\begin{matrix} \Delta_1' = \varkappa' p_{31}' & \Delta_2' = \lambda' p_{31}' & \Delta_3' = \mu' p_{31}' \\ \Delta_4' = \varkappa' p_{32}' & \Delta_5' = \lambda' p_{32}' & \Delta_6' = \mu' p_{32}' \\ \Delta_7' = \varkappa' p_{33}' & \Delta_8' = \lambda' p_{33}' & \Delta_9' = \mu' p_{33}'. \end{matrix}$$

Verfüge ich nun über die vier Gröſsen $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3, \varkappa_4$ in Π_1 so, daſs $\Delta_1' = \Delta_2' = \Delta_3' = 0$ wird, dann müssen, da $p_{31}' \neq 0$ ist, $\varkappa'$, λ' und μ' verschwinden, d. h. es werden alle $\Delta_\lambda' = 0$. Dies gilt, wie die Betrachtung von Π_3 gezeigt hat, auch dann, wenn $\begin{vmatrix} \varkappa_1 & \varkappa_2 \\ \varkappa_3 & \varkappa_4 \end{vmatrix} = 0$, d. h. wenn die Determinante Π erster Stufe wird.

Es fragt sich nur noch: Kann ich die vier Gröſsen $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3, \varkappa_4$ stets so wählen, daſs $\Delta_1' = \Delta_2' = \Delta_3' = 0$ wird? Dies ist leicht zu beantworten: Die drei linearen Gleichungen

$$\Delta_1' = \Delta_2' = \Delta_3' = 0$$

enthalten vier homogene Unbekannte, letztere sind also stets bestimmbar, und zwar ein- oder mehrdeutig.

Führe ich die so gefundenen Werte der $\varkappa$ in Π_1 ein, so ist Π_1 eine „zu D gehörige" Substitutionsdeterminante zweiter oder erster Stufe. Damit ist der auf S. 26 ausgesprochene Satz bewiesen.

Fassen wir nun einmal die Resultate zusammen, die sich ohne Benutzung der Relation $D + E = 0$ ergeben haben:

1) $E = 0$, P' dritter Stufe, bedingt:
$D = 0$, P dritter Stufe.

2) $E = 0$, P' zweiter Stufe, bedingt:
$D = 0$, P erster Stufe.

3) $E = 0$, P' erster Stufe, bedingt:
$D = 0$, P zweiter oder erster Stufe,

und umgekehrt.

In diesen Resultaten steckt zugleich ein indirekter Beweis für den Zusammenhang zwischen D und E, und zwar ist derselbe, wie ich hoffe, von den Einwürfen frei, die sich aus der Möglichkeit des Verschwindens der Substitutionsdeterminante herleiten liefsen.

Was wir bis jetzt für die Substitutionsdeterminanten P und P' nachgewiesen haben, läfst sich leicht auf die übrigen übertragen. Wir erhalten dann folgende Beziehungen:

Zu D_{123} gehört die Substitutionsdeterminante P
„ D_{213} „ „ „ P'
„ D_{312} „ „ „ Q
„ D_{321} „ „ „ Q'
„ D_{231} „ „ „ R
„ D_{132} „ „ „ R'.

Dabei ist Q' die Adjungierte von Q, wenn Q dritter oder zweiter Stufe ist, wie wir dies auch bei P und P' gefunden haben. Das gleiche gilt für R und R'.

Da die Zeilen von D_{321} (vgl. S. 10) mit den Spalten von D übereinstimmen (abgesehen vom Vorzeichen), so kann ich auch, um die früher eingeführte Bezeichnungsweise beizubehalten, sagen: Q' gehört zu den Spalten von D. Ebenso ergiebt sich: R gehört zu den Spalten von E, Q zu den Spalten von F. Sinken die Invarianten unter die achte Stufe, so erhalten wir Gruppen von Substitutionsdeterminanten P, Q u. s. w.; aber die abgeleiteten Beziehungen bleiben unverändert bestehen.

Um noch eine weitere Beziehung zwischen den Substitutionsdeterminanten abzuleiten, verfahre ich folgendermafsen:

Ich nehme an, D sei von Null verschieden, und die Elemente von P seien die Adjunkten der ersten Zeile in D. Ich habe also in

den allgemeinen Formeln auf S. 24 u. 25 einzusetzen:

$$\varDelta_1 = D, \text{ alle übrigen } \varDelta_\lambda = 0,$$

und ich erhalte folgende Resultate:

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}_1 &= \sum a_{i2}p'_{3i} - \sum a_{i3}p'_{2i} = -D\cdot p_{11}\\
\mathsf{E}_2 &= \sum b_{i2}p'_{3i} - \sum b_{i3}p'_{2i} = 0\\
\mathsf{E}_3 &= \sum c_{i2}p'_{3i} - \sum c_{i3}p'_{2i} = 0\\
\mathsf{E}_4 &= \sum a_{i3}p'_{1i} - \sum a_{i1}p'_{3i} = -D\cdot p_{21}\\
\mathsf{E}_5 &= \sum b_{i3}p'_{1i} - \sum b_{i1}p'_{3i} = 0\\
\mathsf{E}_6 &= \sum c_{i3}p'_{1i} - \sum c_{i1}p'_{3i} = 0\\
\mathsf{E}_7 &= \sum a_{i1}p'_{2i} - \sum a_{i2}p'_{1i} = -D\cdot p_{31}\\
\mathsf{E}_8 &= \sum b_{i1}p'_{2i} - \sum b_{i2}p'_{1i} = 0\\
\mathsf{E}_9 &= \sum c_{i1}p'_{2i} - \sum c_{i2}p'_{1i} = 0.
\end{aligned}$$

Diese Gleichungen gelten sicher, solange P dritter oder zweiter Stufe ist. Wenn sie aber auch für den Fall gültig sind, dafs P auf die erste Stufe sinkt, dann mufs für diesen Fall entweder $D = 0$ werden, oder $p_{11} = p_{21} = p_{31} = 0$. Ich will zeigen, dafs stets einer dieser Fälle thatsächlich eintrifft. Ich setze:

$$P = \begin{vmatrix} \varkappa p_1 & \lambda p_1 & \mu p_1 \\ \varkappa p_2 & \lambda p_2 & \mu p_2 \\ \varkappa p_3 & \lambda p_3 & \mu p_3 \end{vmatrix}.$$

Dann ergiebt sich durch Komposition mit den Zeilen in D:

$$\begin{aligned}
\varDelta_1 &= -\lambda \sum a_{3\varkappa}p + \mu \sum a_{2\varkappa}p_\varkappa = D\\
\varDelta_4 &= \varkappa \sum a_{3\varkappa}p_\varkappa - \mu \sum a_{1\varkappa}p_\varkappa = 0\\
\varDelta_7 &= -\varkappa \sum a_{2\varkappa}p_\varkappa + \lambda \sum a_{1\varkappa}p_\varkappa = 0.
\end{aligned}$$

Ist $\varkappa \neq 0$, so erhalte ich:

$$\lambda\varDelta_4 + \mu\varDelta_7 = \varkappa\varDelta_1 = 0, \quad \text{also} \quad D = 0.$$

Ist $\varkappa = 0$, so ist

$$p_{11} = p_{21} = p_{31} = 0, \quad \text{q. e. d.}$$

Somit gelten unsere neun Gleichungen auf voriger Seite unter allen Umständen.

Ich bilde nun

$$\sum_{\varkappa}' \mathsf{E}_{\varkappa} E_{\varkappa 1}.$$

Darin bedeuten die $E_{\varkappa 1}$ die Adjunkten der ersten Spalte in E. Diese Summe hat einerseits den Wert $E \cdot p'_{11}$, andererseits ist sie aber auch gleich

$$-D(p_{11}E_{11} + p_{21}E_{41} + p_{31}E_{71}).$$

Demnach erhalten wir die Gleichung:

$$E \,.\, p'_{11} = -D\,(p_{11}E_{11} + p_{21}E_{41} + p_{31}E_{71})$$

oder:

$$E\,(p_{22}p_{33} - p_{32}p_{23}) = -D\,(p_{11}E_{11} + p_{21}E_{41} + p_{31}E_{71}),$$

oder, da $D + E = 0$ ist:

$$p_{22}p_{33} - p_{32}p_{23} = p_{11}E_{11} + p_{21}E_{41} + p_{31}E_{71}.$$

Bezeichne ich die Adjunkten der Elemente von D mit D_{ik}, so geht die obige Formel über in:

$$D_{15}D_{19} - D_{16}D_{18} = D_{11}E_{11} + D_{12}E_{41} + D_{13}E_{71}.$$

Hätte ich mit der zweiten Spalte in E komponiert, so würde sich ergeben haben:

$$D_{18}D_{13} - D_{19}D_{12} = D_{11}E_{12} + D_{12}E_{42} + D_{13}E_{72}.$$

Ebenso kann ich mit den übrigen Spalten komponieren, und so ergeben sich die folgenden neun Formeln:

$$
\begin{aligned}
&1)\quad D_{15}D_{19} - D_{16}D_{18} = D_{11}E_{11} + D_{12}E_{41} + D_{13}E_{71}\\
&2)\quad D_{18}D_{13} - D_{19}D_{12} = D_{11}E_{12} + D_{12}E_{42} + D_{13}E_{72}\\
&3)\quad D_{12}D_{16} - D_{13}D_{15} = D_{11}E_{13} + D_{12}E_{43} + D_{13}E_{73}\\
&4)\quad D_{16}D_{17} - D_{19}D_{14} = D_{11}E_{14} + D_{12}E_{44} + D_{13}E_{74}\\
&5)\quad D_{19}D_{11} - D_{13}D_{17} = D_{11}E_{15} + D_{12}E_{45} + D_{13}E_{75}\\
&6)\quad D_{13}D_{14} - D_{16}D_{11} = D_{11}E_{16} + D_{12}E_{46} + D_{13}E_{76}\\
&7)\quad D_{14}D_{18} - D_{15}D_{17} = D_{11}E_{17} + D_{12}E_{47} + D_{13}E_{77}\\
&8)\quad D_{17}D_{12} - D_{18}D_{11} = D_{11}E_{18} + D_{12}E_{48} + D_{13}E_{78}\\
&9)\quad D_{11}D_{15} - D_{12}D_{14} = D_{11}E_{19} + D_{12}E_{49} + D_{13}E_{79}.
\end{aligned}
$$

Ähnliche Formeln ergeben sich, wenn ich die Elemente von P aus den Adjunkten einer andern Zeile in D bilde.

Bildet man die Elemente von P' aus den Adjunkten der ersten Zeile in E und komponiert man die Δ_λ mit den Adjunkten der 1., 2., ..., 9. Spalte in D, so erhält man Formeln, die aus den obigen neun dadurch hervorgehen, dafs man D_{ik} mit E_{ik} vertauscht.

Wendet man diese beiden Gruppen von Formeln auf D_{312}, D_{321} an, so erhält man:

$$1) \quad G_{15}G_{19} - G_{16}G_{18} = G_{11}D_{11} + G_{12}D_{14} + G_{13}D_{17}$$
$$2) \quad G_{18}G_{13} - G_{19}G_{12} = G_{11}D_{21} + G_{12}D_{24} + G_{13}D_{27}$$
. . . .

Ferner:

$$1) \quad D_{51}D_{91} - D_{61}D_{81} = D_{11}G_{11} + D_{21}G_{41} + D_{31}G_{71}$$
$$2) \quad D_{81}D_{31} - D_{91}D_{21} = D_{11}G_{12} + D_{21}G_{42} + D_{31}G_{72}$$
. . . .

u. s. w.

Diese Formeln sind sämtlich unter der Voraussetzung abgeleitet, dafs D von Null verschieden ist. Da aber D nicht identisch verschwindet, so behalten sie ihre Gültigkeit auch für den Fall, dafs D verschwindet. Sinkt aber D unter die achte Stufe, so werden alle $D_{ik} = 0$ und unsere Formeln enthalten etwas Selbstverständliches; es fragt sich nun: Gelten die abgeleiteten Beziehungen auch für die Elemente der unendlich vielen Substitutionsdeterminanten, die sich jetzt bilden lassen? Dies läfst sich ohne grofse Schwierigkeit nachweisen. Ich betrachte beispielsweise die erste und vierte Zeile von D als lineare Kombinationen der übrigen Zeilen. Setze ich nun $a_{31} + x$ an die Stelle von x, so wird D achter oder neunter Stufe. In beiden Fällen gelten die abgeleiteten Gleichungen für die nun auftretenden D'_{ik} und E'_{ik}. Da diese aber durch entsprechende Komposition mit sieben Zeilen, bezw. Spalten, die Summe Null liefern, so geschieht dies auch durch Komposition mit den beiden übrigen Zeilen, bezw. Spalten, da diese ja lineare Kombinationen der übrigen sind. Die D'_{ik} kann ich daher auffassen als die Elemente einer der unendlich vielen Substitutionsdeterminanten P, und die E'_{ik} als diejenigen von einer der Substitutionsdeterminanten R. Somit gelten unsere abgeleiteten Gleichungen auch jetzt noch.

Endlich möchte ich durch eine einfache Betrachtung noch einige Determinanten-Identitäten ableiten. Ich führe in D an die Stelle von a_{31} den Wert $a_{31} + x$ ein. Der Wert der neuen Determinante sei D'. Nun ist aber:

$$D' = D + x(D_{41} - D_{14}) - x^2 D_{14,41}$$
$$E' = E + x(E_{76} - E_{49}) - x^2 E_{49,76}.$$

Da $D' + E' \equiv 0$ ist, so folgt:

$$(1) \quad D_{41} - E_{14} + E_{76} - E_{49} = 0 \quad \text{und}$$

$$(2) \quad D_{14,41} + E_{49,76} = 0 .$$

Wenn man in (2) nach dem gleichen Grundsatz weiter operiert, so findet man ähnliche Identitäten zwischen Determinanten 6. und 5. Grades u. s. f.

Berichtigungen.

S. 6 Z. 10 von oben: b_{1k} statt b_{4k}
" 6 " 11 " " c_{1k} " c_{4k}

Lebenslauf.

Ich, Philipp Maennchen, Sohn des Landwirts Johann Maennchen, wurde am 11. Oktober 1869 zu Hohen-Sülzen (Kreis Worms) geboren. Vom 6. bis 14. Jahre besuchte ich die Volksschule zu Hohen-Sülzen, trat Ostern 1885 in die erste Klasse der Realschule zu Worms und Herbst 1886 in Unterprima des Realgymnasiums zu Mainz ein. Die letztgenannte Anstalt verliefs ich Herbst 1888 mit dem Zeugnis der Reife. Im November desselben Jahres erhielt ich eine Stelle als Schulverwalter an der Stadt-Mädchenschule in Giefsen, und in dieser Stellung blieb ich bis zum 1. Mai 1894. Zu Beginn des Wintersemesters 1889/90 liefs ich mich an der Landes-Universität immatrikulieren. Da mir jedoch mein Lehramt keine Zeit zum Besuch der Kollegien gestattete, so liefs ich mich mehrere Semester beurlauben.

In den Jahren 1892 und 1893 war es mir möglich, einige Vorlesungen über Mathematik, Physik und deutsche Litteratur zu hören.

Nach meinem Austritt aus dem Schuldienst studierte ich Mathematik, Physik, Geographie und deutsche Sprache und besuchte zu diesem Zweck die Vorlesungen und Übungen der Herren: Behaghel, Fromme, Heffter, Himstedt, Netto, Pasch, Schiller, Siebeck, Sievers, Wiener.

Am 1. Juli 1896 wurde die von mir verfafste Abhandlung über „Invarianten eines Systems von drei bilinearen ternären Formen“ von der philosophischen Fakultät mit dem Preise gekrönt. In der vorliegenden Dissertation ist der Inhalt der genannten Abhandlung vollständig aufgenommen worden. Neu hinzugekommen sind noch einige Zusätze und Erweiterungen.

Im August 1896 bestand ich die Staatsprüfung für das höhere Lehramt. Mit Rücksicht auf meine frühere Lehrthätigkeit erliefs mir das Grofsh. Ministerium des Innern das erste Accefsjahr, und am 1. Oktober 1896 wurde mir die provisorische Verwaltung einer Lehrerstelle am Realgymnasium und der Realschule zu Mainz übertragen.

Am 21. September d. J. erhielt ich die provisorische Verwaltung einer Lehrerstelle an der Realschule zu Bingen, und in dieser Stellung befinde ich mich zur Zeit.

Allen meinen Lehrern bin ich zu grofsem Danke verpflichtet, insbesondere aber dem Herrn Prof. Pasch, der die Anregung zu der vorliegenden Dissertation gab und mich bei der Ausarbeitung derselben mit seinem geschätzten Rate unterstützte.

Bingen, 11. November 1897.

Ph. Maennchen,
Lehramtsaccessist.





